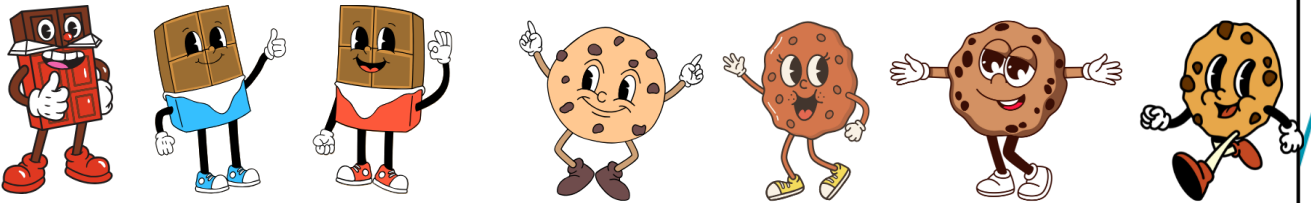


# Правило суми

Скількома способами можемо вибрати одну шоколадку або одне печиво?



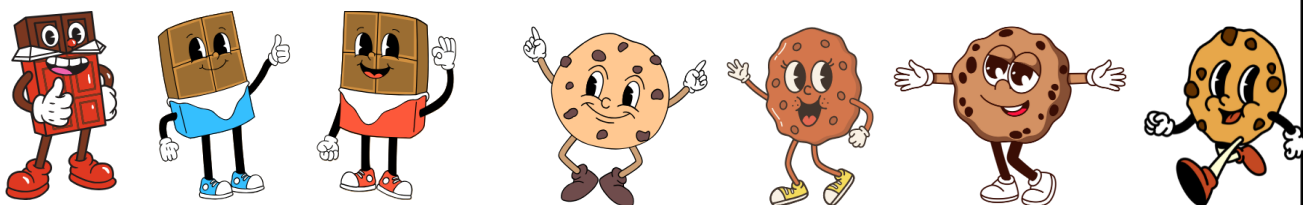
*Оскільки шоколадку можна вибрати 3-ма способами, а печиво 4-ма способами, то один із них можна вибрати  $3 + 4 = 7$  способами.*

## Правило суми:

Якщо деякий елемент  $A$  можна вибрати  $m$  способами, а деякий елемент  $B$  –  $n$  способами (причому будь-який вибір елемента  $A$  відрізняється від вибору елемента  $B$ ), то вибрати  $A$  **або**  $B$  можна  $m + n$  способами.

# Правило добутку

Скількома способами можемо вибрати одну шоколадку і одне печиво?



Оскільки можемо вибрати будь-яку одну з 3-х шоколадок то парюю до неї може бути будь-яке одне з 4-х печив, тоді можемо вибрати одну шоколадку і одне печиво  $3 \cdot 4 = 12$  способами.

## Правило добутку:

Якщо деякий елемент  $A$  можна вибрати  $m$  способами, а після кожного такого вибору інший елемент  $B$  можна вибрати  $k$  способами, то пару об'єктів  $A$  і  $B$  можна вибрати  $m \cdot k$  способами.

Розділ математики, що вивчає способи розв'язування подібних задач називається *комбінаторикою*, а самі задачі – *комбінаторними*.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називаються *сполуками*. В шкільному курсі ми будемо розглядати сполуки без повторень.

# Факторіал

*Розглянемо задачу:*

Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 5, 6, 7, 8 причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

*Розв'язання.*

Першою цифрою в такому чотирицифровому числі може бути будь-яка із чотирьох цифр: 5, 6, 7 або 8. Маємо: 4 варіанти.

Оскільки всі цифри в цьому чотирицифровому числі мають бути різними, то якою б не була перша цифра, другою цифрою числа може бути будь-яка з тих трьох цифр, що залишилися. Отже, для кожного із чотирьох варіантів вибору першої цифри існує 3 варіанти вибору для другої цифри. Використовуючи правило добутку, маємо, що перші 2 цифри чотирицифрового числа можна вибрати  $4 \cdot 3 = 12$  способами.

Міркуючи аналогічно, стверджуємо, що для кожного із цих 12 варіантів вибору перших двох цифр існує 2 варіанти вибору третьої цифри. Справді, якщо першими двома цифрами вибрано, наприклад, цифри 5 і 6, то третьою цифрою може бути будь-яка з двох цифр — 7 або 8. Використовуючи правило добутку, доходимо висновку, що перші 3 цифри можна вибрати  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  способами.

Оскільки всі цифри в чотирицифровому числі мають бути різними, то зрозуміло, що перші 3 цифри числа однозначно визначають останню четверту цифру. Тому із цифр 5, 6, 7, 8 можна скласти  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  чотирицифрових числа так, щоб у кожному числі всі цифри були різними.

*Відповідь.* 24.

*Кількість різних чотирицифрових чисел у яких жодна цифра не повторюється можна скласти  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способами.*

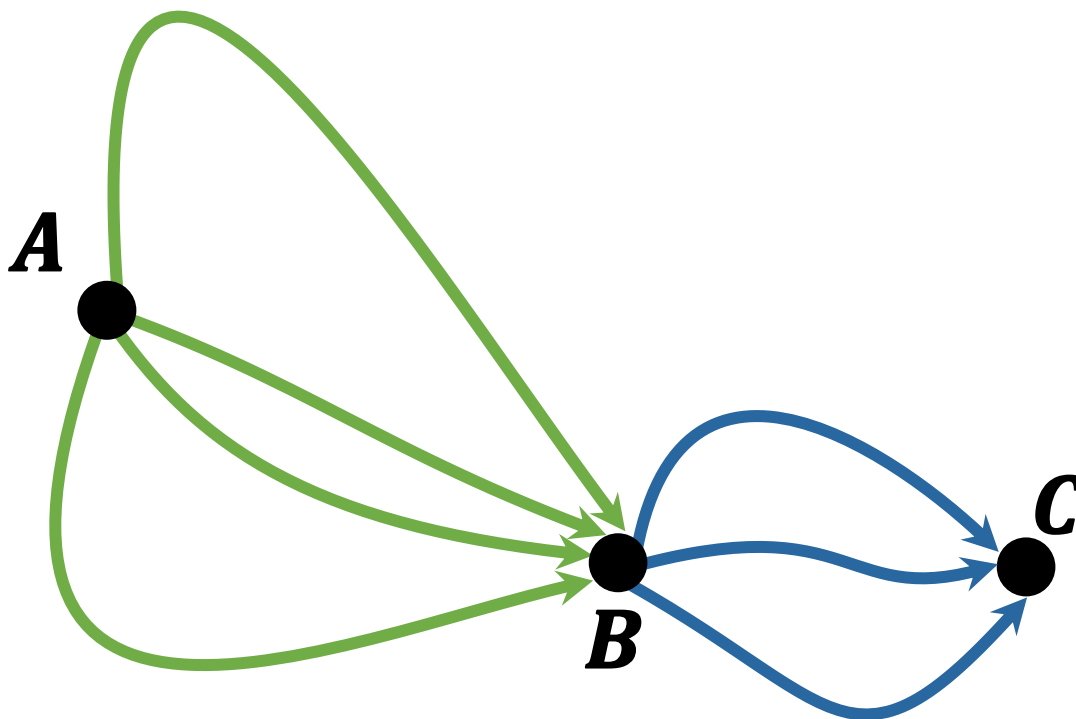
Під час розв'язування прикладу нам довелося обчислювати добуток  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . У комбінаторних задачах добуток послідовних натуральних чисел від 1 до  $n$  зустрічається настільки часто, що отримав спеціальну назву «факторіал» і позначення  $n!$  (запис « $n!$ » читають «ен факторіал»):  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Наприклад,  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

**За означенням  $0! = 1$  і  $1! = 1$**

## Задача

Із міста *A* до міста *B* проходять 4 дороги, а з міста *B* до міста *C* проходять 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста *A* до міста *C*?



*Розв'язання.*

Дорогу від міста *A* до міста *B* можна обрати 4-ма способами, а дорогу від міста *B* до міста *C* – 3-ма способами, то за правилом добутку дорогу від міста *A* до міста *C* можна подолати  $4 \cdot 3 = 12$  способами.

Відповідь: 12.

## Задача

На вершину гори прокладено 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

*Розв'язання.*

Розглянемо перший випадок, коли альпініст може спускатися тим же маршрутом, що і піднявся. Так як в цьому випадку він може піднятися 5 маршрутами та спуститися 5 маршрутами, то способів підйому та спуску існує:

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ способів}$$

Розглянемо другий випадок, коли альпініст не може спускатися тим же маршрутом, що і піднявся. В цьому випадку альпініст може піднятися 5 способами і спуститися 4 способами, так як не може використовувати для спуску маршрут підйому. Отже способів підйому та спуску існує:

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ способів}$$

Відповідь: 25 способів у 1-му випадку і 20 способів у 2-му випадку.

## Задача

Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

*Розв'язання.*

Так як цифри можуть повторюватися, то для вибору кожної цифри існує 7 способів, отже для запису числа існує:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401 \text{ способів}$$

*Відповідь:* 2401 способів.

## Задача

Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга – голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова:

- 1) шабля;
- 2) шаровари.

*Розв'язання.*

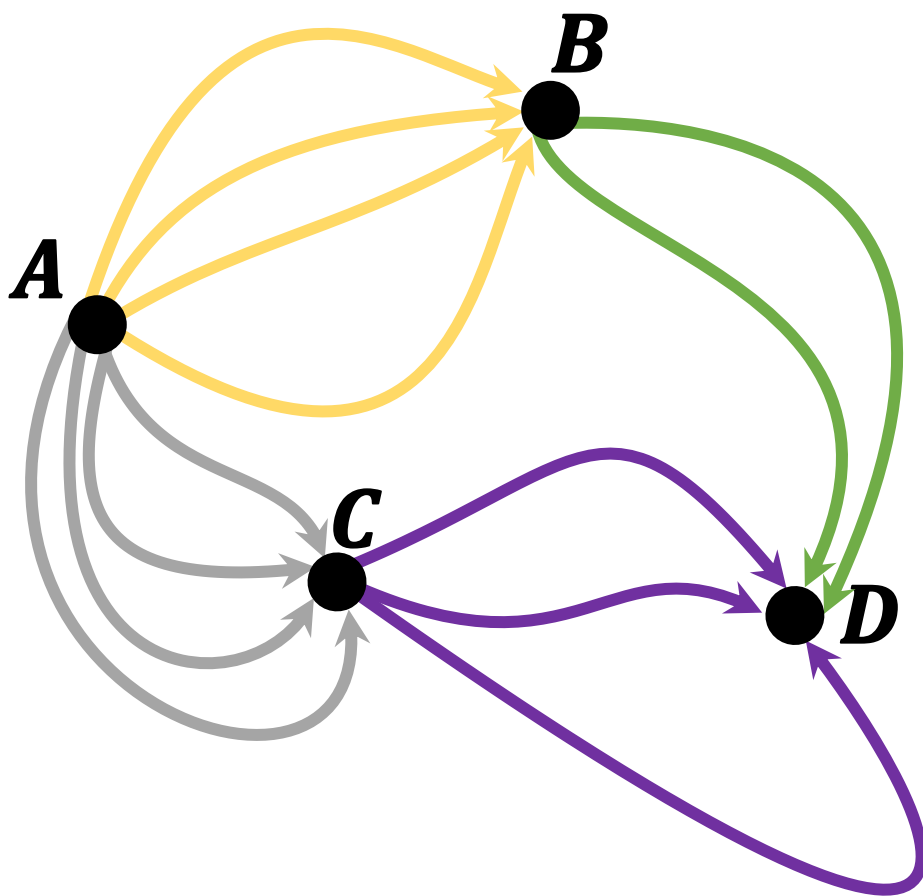
*Зверніть увагу!  
Для передавання на письмі шести голосних звуків використовують десять літер: а, е, и, і, о, у, я, ю, є, ї.*

Так як слово «шабля» складається із 3-х різних букв, що позначають приголосний звук і 2-х різних букв, що позначають голосний звук і нам необхідно скласти склади з двох букв, на першому місці яких має стояти буква, що позначає приголосний звук, то можна скласти:  $3 \cdot 2 = 6$  таких різних складів.

Так як слово «шаровари» складається із 3-х різних букв, що позначають приголосний звук і 3-х різних букв, що позначають голосний звук і нам необхідно скласти склади з двох букв, на першому місці яких має стояти буква, що позначає приголосний звук, то можна скласти:  $3 \cdot 3 = 9$

## Задача

На рисунку показано схему доріг, які ведуть з міста  $A$  до міста  $D$ . Скількома способами можна проїхати з міста  $A$  до міста  $D$ ?



*Розв'язання.*

Так як з міста  $A$  до міста  $D$  через місто  $B$  можна проїхати  $4 \cdot 2 = 8$  способами, а через місто  $C$   $4 \cdot 3 = 12$  способами, то загалом до з міста  $A$  до міста  $D$  можна проїхати  $8 + 12 = 20$  способами.

*Відповідь:* 20.

## Задача

**Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?**

*Розв'язання.*

Існує 5 парних цифр: 0, 2, 4, 6, 8

Скількома способами можемо обрати першу цифру для нашого трицифрового числа?

*(Маємо 4 способи, так як не можемо поставити нуль як першу цифру числа)*

Так як на перше місце трицифрового числа можемо поставити одну з 4-х цифр і на кожне наступне одну з 5 цифр, то можемо отримати:  $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$  чисел.

*Відповідь: 100.*

## Задача

**Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?**

*Розв'язання.*

При кожному підкиданні монети завжди будуть можливі 2 випадки (герба або цифра), отже за 4 підкидання можливі  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$  випадків

*Відповідь: 16.*

## Задача

**Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?**

*Розв'язання.*

Так як першу цифру можемо вибрати 6 способами (нуль не може бути першою цифрою), другу цифру можемо вибрати 7 способами а третю цифру 4 способами (так як число за умовою має бути парним)  $\Rightarrow$  кількість чисел можна записати  $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$  способами.

*Відповідь:* 168.

## Задача

**Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5?**

*Розв'язання.*

Маємо 10 цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Нуль не може бути першою цифрою, тому для вибору першої цифри маємо 9 способів.

Другу, третю та четверту цифру до п'ятицифрового числа можемо обрати  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

П'ятицифрове число за умовою має ділитися націло на 5, тому для вибору останньої цифри існує 2 способи: 0 або 5

Отже, існує  $9 \cdot 10^3 \cdot 2 = 18000$  п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5

*Відповідь:* 18000.